

MODELAREA INTERACȚIUNII ELECTRON-FONONICE DE REZONANȚĂ PENTRU IONII DE PĂMÂNT RAR ÎN CRISTALE LASER

Victor CIOBU

Universitatea de Stat din Moldova

Efecte ale interacțiunii electron-fofonice în cazul ionilor de pământ rar (PR) în cristale sunt relaxarea multifonică, benzile vibronice, lărgirea benzii în funcție de temperatură sau transferul de energie non-rezonant asistat de fononi. Având în vedere că despiciările Stark pentru ionii de PR sunt de ordinul fononilor de rețea, ar putea apărea și alte efecte legate, în special, de procesele în aproximația de cvasirezonanță. Dacă distanța dintre două niveluri Stark este aproape de rezonanță în regiunea spectrului fononic, atunci interacțiunea electron-fofonică creează stări vibronice mixte, care determină modificări ale liniilor spectrale optice (lărgirea, asimetria, despicierea sau deplasarea). Modelarea interacțiunii electron-fofonice de rezonanță pentru ionul de pământ rar Yb^{3+} în trei cristale laser diferite este scopul acestei lucrări.

Cuvinte-cheie: interacțiune electron-fofonică, ioni de pământ rar, aplicație adaptivă.

MODELING RESONANT ELECTRON-PHONON INTERACTION FOR RARE EARTHS IONS IN LASER CRYSTALS

Effects of the electron-phonon interaction for rare earth ions (RE) in crystals are multi-phonon relaxation, vibronic bands, band broadening depending on temperature or non-resonant energy transfer assisted by phonons. Since the Stark splitting for RE ions are of the order of lattice phonon energy, it could arise and other related effects, especially in the approximation of quasi-resonant processes. If the distance between two Stark levels is close to the region of resonance phonon spectrum, then electron-phonon interaction creates mixed vibronic states, which causes changes in the optical spectral lines (widening, asymmetry, splitting or displacement). The modeling of interaction of the electron-phonon resonance for RE ion Yb^{3+} in three different laser crystals is the purpose of this paper.

Keywords: electron-phonon interaction, rare earth ions, adaptive application.

Introducere

Cele mai studiate efecte ale interacțiunii electron-fofonice în cazul ionilor de pământ rar (PR) în cristale sunt relaxarea multifonică, benzile vibronice, lărgirea benzii în funcție de temperatură sau transferul de energie non-rezonant asistat de fononi. Având în vedere că despiciările Stark pentru ionii de PR sunt de ordinul fononilor de rețea, ar putea apărea și alte efecte legate, în special, de procesele în aproximația de cvasirezonanță. Dacă distanța dintre două niveluri Stark este aproape de rezonanță în regiunea spectrului fononic, interacțiunea electron-fofonică creează stări vibronice mixte, care determină modificări ale liniilor spectrale optice (lărgirea, asimetria, despicierea sau deplasarea) [1-10]. În unele cazuri, tranzițiile vibronice și efectele de rezonanță sunt atât de puternice, încât atribuirea nivelurilor electronice este ambiguă. Pentru a avea efecte de rezonanță intense, este necesară existența cuplării electron-fofonice destul de puternice și vârfuri ascuțite în densitatea fononică din regiunea de rezonanță. Acest lucru explică de ce datele experimentale raportate privind efectele de rezonanță în compușii ionici se referă, în special, la ionii Yb^{3+} ($4f^{13}$) [1, 2, 5], Tm^{3+} ($4f^{12}$) [9] sau Tm^{2+} ($4f^{13}$) [10], Pr^{3+} ($4f^2$) [6-7], sau Ce^{3+} ($4f^1$) [8], adică ionii de PR la începutul și la sfârșitul seriei lantanidelor, care prezintă o interacțiune electron-fofonică destul de puternică [11-12]. Investigațiile de față reprezintă o abordare teoretică a proceselor fizice în aproximația de cvasirezonanță pentru ionii de PR în cazul nivelurilor Stark nedegenerate, în acest context fiind dezvoltată modelarea interacțiunii electron-fofonice de rezonanță pentru ionii de PR în cristale laser, care a fost propusă inițial în [13]. Sunt prezentate expresiile pentru absorbția sau emisia form-linii, iar modelul teoretic este aplicat pentru a explica unele caracteristici spectrale ale tranzițiilor observate experimental. Este prezentată analiza spectrelor Yb^{3+} în YAG ($\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$). Cristalul YAG este cunoscut ca având vârfuri ascuțite în densitatea fononică [11, 12, 14]. Aceste investigații sunt importante atât din punctul de vedere al fizicii teoretice și computaționale, cât și din perspectiva utilizării practice a acestor materiale în calitate de activator laser. Într-adevăr, interacțiunea electron-fofonică cvasirezonantă în spectrele optice ale ionilor de PR în compuși anorganici se manifestă prin despiciările sau deplasările liniilor electronice, precum și prin efectele termice (deplasări sau lărgiri). Pentru unii ioni, cuplajul electron-fofonic determină interferențe destul de mari ale nivelurilor electronice pure cu cele vibronice, astfel încât

elucidarea structurii electronice constituie o importantă problemă de soluționat. Aceste efecte depind în mare măsură de rezonanța între niveluri Stark și vârfurile densității fononilor în apropierea de rezonanță și cuplarea electron-fononică. Această ultimă condiție determină ca efectele să fie mai pronunțate pentru ionii de PR^{3+} de la începutul sau sfârșitul lantanidelor, adică al elementelor chimice din grupa metalelor tranzitionale de tip f [1-10].

Modelul teoretic

Problema este de a obține funcția form-linii pentru absorbția sau emisia luminii de frecvență Ω între cele două stări ale sistemului electron-fononic în condiții apropiate de rezonanță (cvasirezonanță). Hamiltonianul total $H = H_L + H_e + V$ conține hamiltonianul electronic H_e , hamiltonianul de vibrație H_L și hamiltonianul de interacție electroni-fononic V . Hamiltonianul de interacție poate fi scris, în primul rând, ca

$$V = \sum_k (v_k a_k + v_k^+ a_k^+) , \quad (1)$$

Aici $k = (\vec{k}, \mu)$ caracterizează fononii, \vec{k} fiind impulsul fononic și μ ramura vibrației, iar a_k, a_k^+ denotă operatorii de anihilare și de creare, iar v_k – operatorii electronici. În cazul în care $|s\rangle$ și $|p\rangle$ sunt funcțiile proprii ale hamiltonianului total $H = H_L + H_e + V$ și $|s\rangle$ este starea inițială, atunci funcția form-linii pentru absorbția luminii de frecvență Ω poate fi scrisă în modul următor:

$$F(\Omega) = \sum_p |\langle p|d|s\rangle|^2 \delta(\Omega - \Omega_{ps}), \quad (2)$$

unde $\Omega_{ps} = E_p - E_s$ și d este operator electronic de tranziție. Folosind formula

$$\delta(\Omega - \Omega_{ps}) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^{+\infty} \exp[i(\Omega_{ps} - \Omega)t - \gamma t] dt , \quad (3)$$

unde γ este lărgimea intrinsecă a liniei, funcția pentru form-linii devine:

$$F(\Omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^{+\infty} I(t) \exp[-i\Omega t - \gamma t] dt \quad (4)$$

cu

$$I(t) = \sum_p \langle s|d^+|p\rangle e^{i(E_p - E_s)t} \langle p|d|s\rangle, \quad (5)$$

scrisă cu $I(t) = \sum_p \langle s|d^+|p\rangle \langle p|e^{iHt} d e^{-iHt}|s\rangle$.

În rezultatul unor transformări matematice prezentate în [15], putem scrie forma finală pentru funcția form-linii (2):

$$F(\Omega) = \frac{1}{\pi} \sum_f |\langle f|d|s\rangle|^2 \frac{\gamma + \Gamma_f(\Omega)}{[\Omega - \Omega_{fs} - \Sigma_f(\Omega)]^2 + [\gamma + \Gamma_f(\Omega)]^2} . \quad (6)$$

Neglijând lățimea intrinsecă γ , putem scrie:

$$\Gamma_f(\Omega) = \frac{\pi}{\hbar^2} \sum_{r,k} |\langle f|v_k|r\rangle|^2 [(n_k + 1)\delta(\Omega - \Omega_{fs} + \Delta_{fr} - \omega) + n_k \delta(\Omega - \Omega_{fs} + \Delta_{fr} + \omega)] \quad (7)$$

$$\Sigma_f(\Omega) = \frac{1}{\hbar^2} P \sum_{r,k} |\langle f|v_k|r\rangle|^2 \left[\frac{n_k + 1}{\Omega - \Omega_{fs} + \Delta_{fr} - \omega_k} + \frac{n_k}{\Omega - \Omega_{fs} + \Delta_{fr} + \omega_k} \right]. \quad (8)$$

Dacă vom trece de la sume la integrale și vom media elementele matricei de interacție după fononii cu aceeași frecvență, obținem:

$$\Gamma(\Omega) = \frac{\pi}{\hbar^2} \sum_n \int_0^\infty A_r(\omega) \rho(\omega) \{ [n(\omega) + 1] \delta(\Omega - \Omega_{f,t} + \Delta_{f,n} - \omega) + n(\omega) \delta(\Omega - \Omega_{f,t} + \Delta_{f,n} + \omega) \} d\omega, \quad (9)$$

$$\mathcal{L}(\Omega) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_n P \int_0^\infty A_r(\omega) \rho(\omega) \left[\frac{n(\omega) + 1}{\Omega - \Omega_{f,t} + \Delta_{f,n} - \omega} + \frac{n(\omega)}{\Omega - \Omega_{f,t} + \Delta_{f,n} + \omega} \right] d\omega, \quad (10)$$

unde $\rho(\omega)$ indică densitatea stărilor fononice, iar $A_r(\omega)$ reprezintă elementul de matrice al interacțiunii electron-fononice mediată după fononii cu frecvența ω . Conform expresiei (6), $\Gamma(\Omega)$ reprezintă lărgirea form-linii, iar $\mathcal{L}(\Omega)$ este deplasarea ei.

Rezultatele numerice și discuții

Acest model teoretic este folosit în continuare pentru a rezolva problema nivelurilor energetice pentru Yb^{3+} în YAG. Spectrele de absorbție pentru Yb^{3+} în YAG la diferite temperaturi au fost măsurate cu un sistem de rezoluție înaltă. Deoarece Yb^{3+} ($4f^{13}$) înlocuiește în YAG Y^{3+} pozițiile dodecahedrale de simetrie locală D_2 , atunci 2 multiplete ${}^2F_{7/2}$ (fundamental) și ${}^2F_{5/2}$ (excitat) se despică în 4 și 3 dublete Stark, respectiv. În Figura 1 este prezentat spectrul de absorbție la 10 K, care corespunde tranzițiilor ${}^2F_{7/2} \rightarrow {}^2F_{5/2}$ pentru Yb^{3+} (5at.%) în YAG. Spectrul ar trebui să conțină doar trei linii zero-fononice pentru Yb^{3+} corespunzătoare tranzițiilor permise ${}^2F_{7/2}(1) \rightarrow {}^2F_{5/2}$ în D_2 din componenta Stark fundamentală [15].

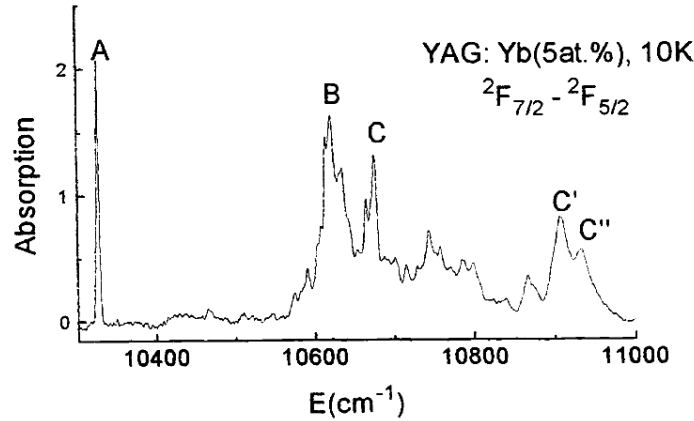


Fig.1. Spectrul de absorbție la tranziția ${}^2F_{7/2}(1) \rightarrow {}^2F_{5/2}$ pentru Yb^{3+} (5at.%) în YAG.

Pentru a explica spectrele, a fost propus următorul model [15]: liniile B și C sunt componentele rezonante despicate pentru al doilea nivel Stark E_2 pentru multipletul excitat ${}^2F_{5/2}$ al Yb^{3+} , în timp ce liniile C' și C'' corespund despicării pentru al treilea nivel Stark E_3 . Dacă B și C sunt componente rezonante despicate, se obține poziția nivelului electronic nedespicat, adică $\Delta_{f,n} \sim 323 \text{ cm}^{-1}$ ($E_2 \sim 10650 \text{ cm}^{-1}$), energia fononilor cvasirezonantă $\omega_1 \sim 327 \text{ cm}^{-1}$ și parametrul de interacțiune $B^{1/2} \sim 26 \text{ cm}^{-1}$. De menționat că densitatea fononilor în YAG are un vârf ascuțit și intens la $\omega_1 \sim 327 \text{ cm}^{-1}$, așa cum s-a observat și la alți ioni [14]. Celelalte vârfuri din jurul lui B sau C sunt vibronice, care indică o creștere în intensitate, deși poziția lor în raport cu A (în limita erorilor experimentale ale acestor date publicate) este nedepășită. Dacă liniile C' și C'' sunt considerate despicate rezonant, se obține $\Delta_{f,n} \sim 596 \text{ cm}^{-1}$ ($E_3 \sim 10921 \text{ cm}^{-1}$), $\omega_2 \sim 603 \text{ cm}^{-1}$, fiind într-o concordanță bună cu vârful fononic ascuțit din YAG [11-12] și $B^{1/2} \sim 13 \text{ cm}^{-1}$. Acest model oferă o schemă nouă pentru nivelul energetic electronic pentru multipletul ${}^2F_{5/2}$ al Yb^{3+} în YAG: 10327, 10650 și 10921 cm^{-1} . Diagrama nivelului de energie propusă pentru Yb^{3+} în YAG diferă de cele anterioare [16-21].

Aplicația adaptiv-parametrică elaborată conține programul de calcul, care începe cu definirea mapei în care sunt stocate datele, fiind apoi definite și constantele: constanta de transformare cm^{-1} în J, precum și constanta Boltzmann în J/K:

```
path = "D:\\phys2\\";
SetDirectory[path];
cm2J = 6.62607 * 10-34 * 2.99 * 108 * 100;
b = 1.38065 * 10-23;
```

Funcția **execute** îndeplinește toate calculele necesare. În calitate de valori fizice de intrare sunt temperatura T , liniile electronice și fononice experimentale. Fiecare element de matrice cu liniile electronice posedă următoarea structură:

$\{ \text{numărul liniei, energia în } \text{cm}^{-1}, \text{lățimea în } \text{cm}^{-1}, | \langle i | d | f \rangle |^2 \}$,

iar pentru elementul de matrice al benzilor fononice avem:

$\{ \text{numărul liniei } f, \text{ numărul liniei } r, \text{ energia fononului în } \text{cm}^{-1}, \text{lățimea în } \text{cm}^{-1}, \text{ parametrul de cuplaj } A_r(\omega) * a(\omega) / \hbar^2 \}$.

Screenshotul imaginii interfeței sistemului informatic adaptiv pentru modelarea form-linii de absorbție pentru ionii de PR în cristale laser este prezentat în Figura 2.

Aplicație adaptiv-parametrică (Doctorand Victor CIOBU)

A.A. - FULLERENE A.A. - IONI PAMINT-RAR

Introducerea parametrilor

Selectati tip Cristal: YAG

Nr Linii: 3 Temperatura: 10 Execută

Electroni

Energia tranziției electronului	Lățimea liniei electronice	Elementul de matrice
10327	5	40
10646	5	90
10914	14	70

Fononi

De la Pină la	Energia fononului	Lățimea liniei fononice	Parametrul de cuplaj
2 ▾ 1 ▾	289	3	20
2 ▾ 1 ▾	300	4	60
2 ▾ 1 ▾	327	18	700
2 ▾ 1 ▾	344	1	20
3 ▾ 1 ▾	599	10	140

Fig.2. Interfața aplicației pentru ionii de PR în cristale laser.

Valorile parametrilor fizici folosiți în modelare sunt prezentate în Tabelul ce urmează [13], iar rezultatele calculelor numerice sunt prezentate în figurile 3-5.

Tabel

Parametrii utilizați pentru modelarea form-linii de absorbție Yb^{3+} în cvasirezonanță

Cristalul	Nivelul Yb^{3+} $E_i(\text{cm}^{-1})$	Nivelul Yb^{3+} lățimea liniei $\gamma(\text{cm}^{-1})$	Energia fononului $\omega(\text{cm}^{-1})$	Lățimea liniei fononului	Cuplarea $A(\omega)^2 \alpha$	Vârful fononului în cristal (Raman)
YAG	E_1 —10 327	5				
	E_2 —10 646	5	289	3	20	290
			300	4	60	305
			327	18	700	325
			344	1	20	340
E_3 —10 914	14	599	10	140	600	
LiNbO ₃	E_1 — 10201.5	5				
	E_2 —10 462	50	232	5	90	232
			270	8	150	270
YLF	E_1 —10 290	1				
	E_2 —10 418	2				
	E_3 —10 559	10	272	5	50	273

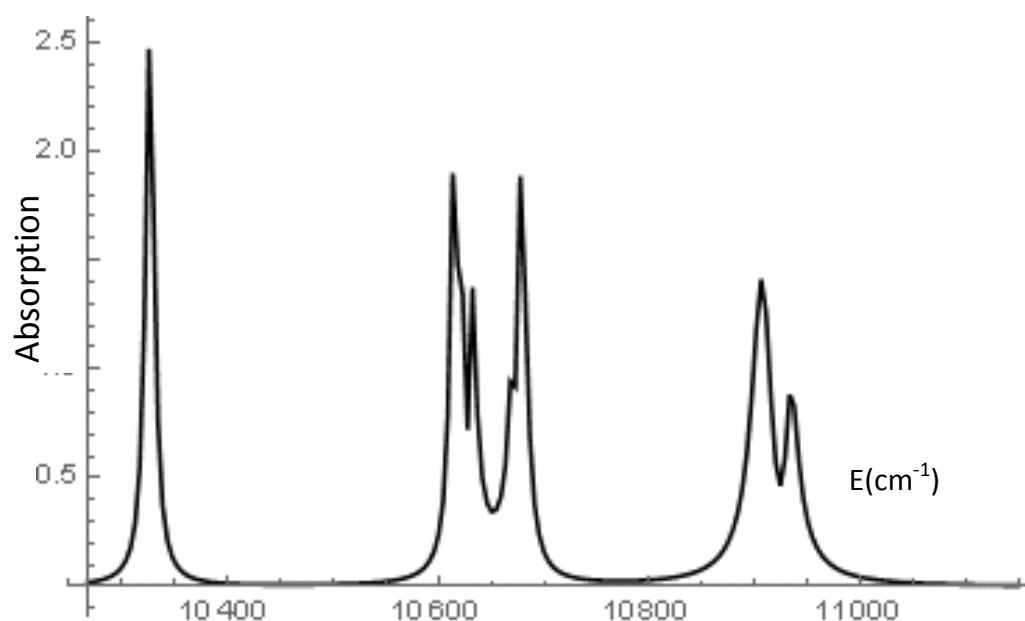


Fig.3. Modelarea spectrului de absorbție la tranziția ${}^2F_{7/2}(1) \rightarrow {}^2F_{5/2}$ pentru Yb^{3+} (5at.%) în YAG; E_i sunt niveluri Stark ${}^2F_{5/2}$. Spectrul experimental este prezentat în Figura 1.

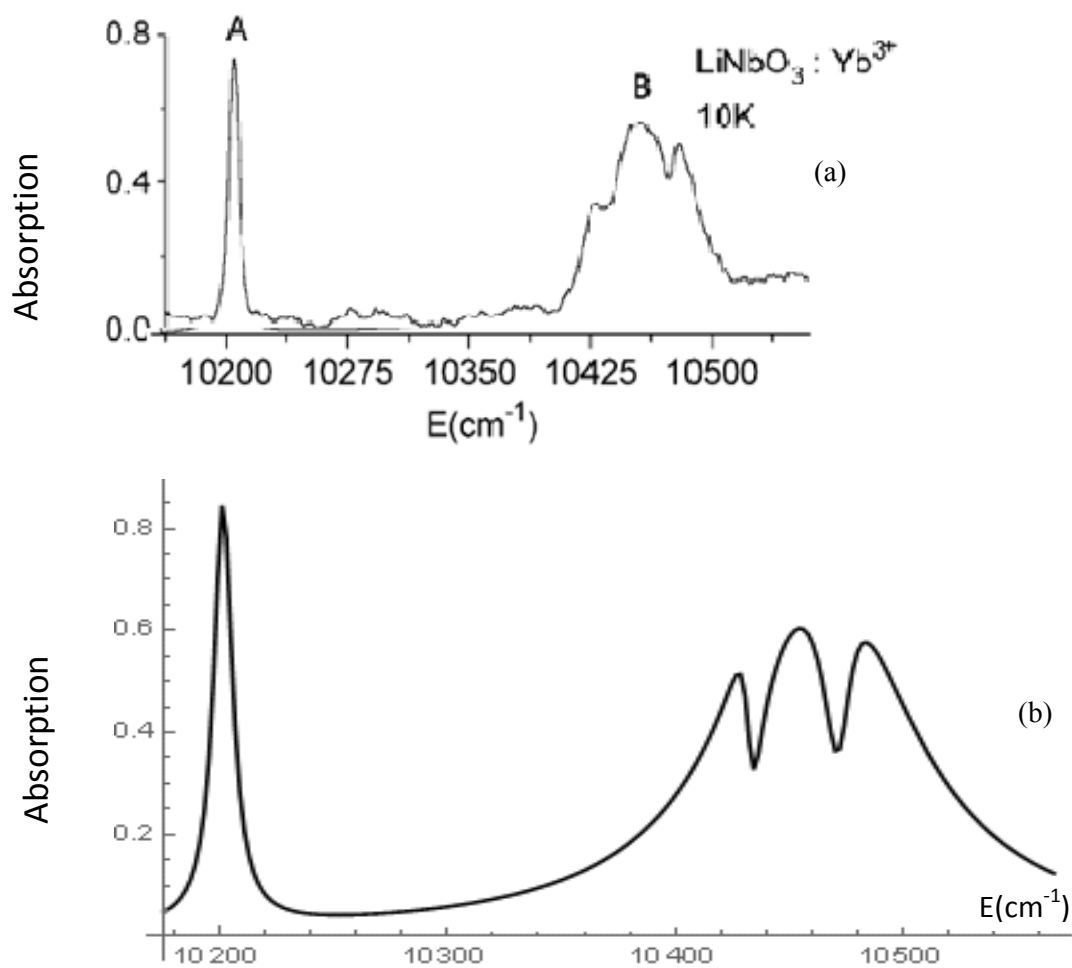
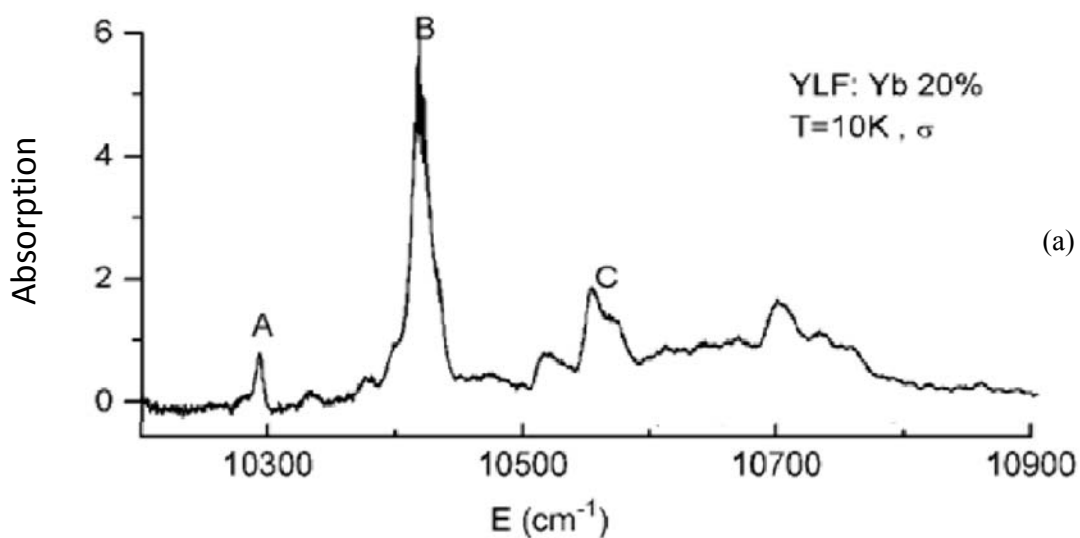


Fig.4. O parte a spectrului de absorbție al Yb^{3+} în LiNbO_3 la 10 K (a) și modelarea teoretică a form-linii (b).



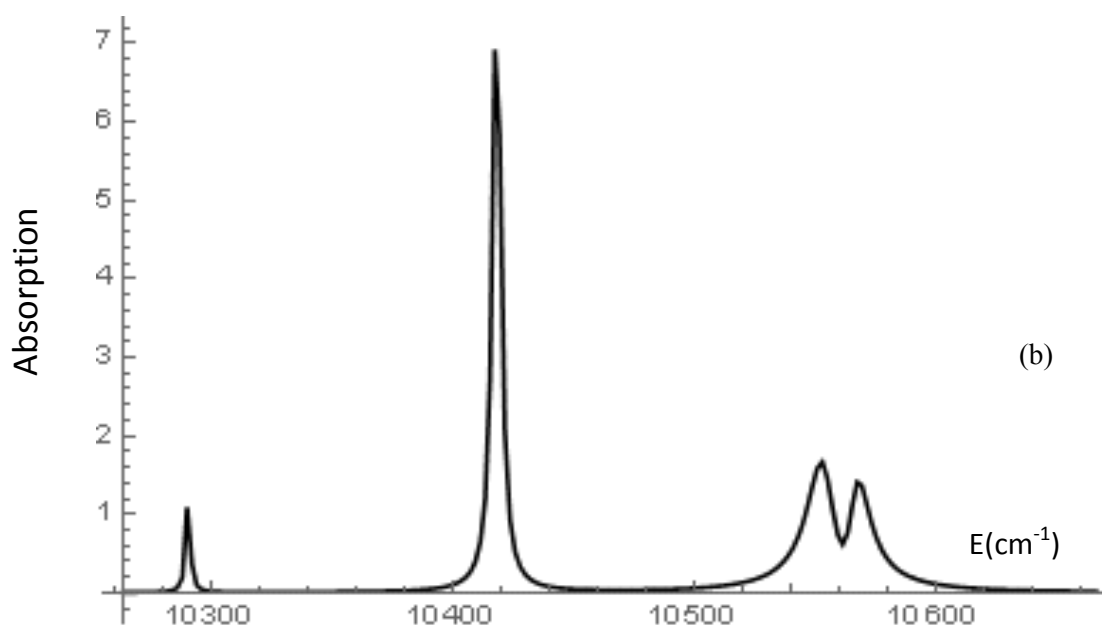


Fig.5. Spectrul de absorbție polarizat pentru Yb^{3+} (20at.%) în YLF la 10K (a) și modelarea teoretică a form-linii (b).

Structura matricelor se transformă pentru comoditate în e, **uniqueElectronLines**, **uniqueResonance**, **ph**. Se determină funcția de distribuție Bose-Einstein $\mathbf{n}[\omega_]$. Funcția **ArRho** reprezintă produsul $A_r(\omega) \rho(\omega)$, calculat conform formulelor (10) și densitatea stărilor fononice $\rho(\omega) = \sum_i \alpha_i v_i(\omega)$, unde $v_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha_i}{(\omega - \omega_i)^2 + \alpha_i^2}$, iar α_i este contribuția fononului i , α_i fiind jumătate din lățimea vârfului fononic. $\Gamma[\Omega_f_r_]$ este funcția pentru care se determină integrala din expresia (9) pentru liniile concrete f și r . $\Gamma[\Omega_f_]$ reprezintă funcția completă din formula (9) pentru o anumită valoare f . Analogic se procedează în cazul formulei (10) $\Sigma r[\Omega_f_r_]$ și $\Sigma[\Omega_f_]$, însă integrarea se efectuează nu în limitele de la 0 până la ∞ , dar în anumite intervale concrete determinate de liniile fononice. Dacă mărimea expresiei $\Omega - \Omega_{fi} + \Delta_{fr}$ se găsește în acest interval, atunci această valoare se exclude din integrare, deoarece este un punct singular. Funcția **FF** $[\Omega_]$ denotă formula (6), iar funcția **drawPlot** construiește graficul respectiv. În final, funcția **execute** afișează acest grafic. Funcția **createFolder** și algoritmul programat sunt similare în fișierul **ScheduledTaskFullerene.nb**.

Concluzii

A fost modelată interacțiunea electron-fononică de rezonanță pentru ionii de PR în cristale laser. Comparația spectrului de absorbție, bazată pe aplicația adaptiv-parametrică elaborată, cu rezultatele numerice obținute pentru form-liniile de absorbție, demonstrează o bună concordanță a datelor experimentale la tranziția ${}^2F_{7/2}(1) \rightarrow {}^2F_{5/2}$ pentru Yb^{3+} (5at.%) în YAG, a unei părți a spectrului de absorbție al Yb^{3+} în LiNbO_3 la 10 K și a spectrului de absorbție polarizat pentru Yb^{3+} (20at.%) în YLF la 10 K. Îmbunătățirea calculului parametric pentru câmpul cristalin are o semnificație limitată în astfel de cazuri, deoarece deplasările induse de cuplajul electron-fononic ar putea depăși precizia calculului numeric. Metalele pământuri rare posedă proprietăți unice și prezintă interes sporit pentru calculul cuantic, creând posibilitatea realizării dinamicii controlate care permite implementarea porților cuantice de n -biți. Frecvențele exacte ale tranzițiilor optice depind puternic de câmpurile electrice înconjurătoare, iar combinația dintre benzile spectrale omogene înguste și extinderea neomogenă semnificativă într-un interval mare de frecvențe oferă pentru cercetările ulterioare diferite posibilități de adaptivitate parametrică.

Referințe:

1. PERLIN, Yu.E., KAMINSKII, A.A., ENAKI, V.N., VILEGHANIN, D.N. Electron-phonon resonances in the spectrum of a rare-earth impurity ion. In: *Pisma J. E. T. F.*, 1979, vol.30, p.426-429.
2. PERLIN, Yu.E., ENAKI, V.N. *Physical processes in semiconductors*. Chișinău: Știința, 1981.
3. ENAKI, V.N. *Nonequilibrium processes in multicomponent crystals*. Chișinău: Știința, 1988.
4. MALTA, O.L. The theory of vibronic transitions in rare earth compounds. In: *J. Phys. Chem. Sol.*, 1995, vol.56, p.1053-1062.
5. DeLOACH, L.D., PAYNE, S.A., KWAT, W.L., TASSANO, J.B., DIXIT, S.N., and KRUPKE W.F. Vibrational structure in the emission spectra of Yb³⁺ doped apatite crystals. In: *Journal of Luminescence*, 1994, vol.62 (3), p.85-94.
6. CARO, P., MOUNE, O.K., ANTIC-FIDANCEV, E., LEMAITRE-BLAISE, M. Vibronic optical transitions in inorganic and organic rare earth materials. In: *J. Less. Common. Metals*, 1985, vol.112(1), p.153-173.
7. DAHL, M., SCHAACK, G. Davydov splitting of crystal-field excitations and magnetic phonon splitting in PrF₃. In: *Phys. Rev. Lett.*, 1986, vol.56, p.232-236.
8. GERLINGER, H., SCHAACH, G. Crystal-field states of the Ce³⁺ ion in CeF₃: A demonstration of vibronic interaction in ionic rare-earth compounds. In: *Phys. Rev. B*, 1986, vol.33, p.7438-7450.
9. LUPEI, A., LUPEI, V. Resonance between electronic and vibronic levels of in yttrium aluminium garnet. In: *J. Phys.: Condens. Matter.*, 1997, vol.9, p.2807-2813.
10. IGNATIEV, I., OVSYANKIN, V. Electron-vibrational shift of f-levels in CaF₂ and SrF₂ crystals with Tm²⁺ ions. In: *Journal of Luminescence*, 1997, vol.72-74, p.679-680.
11. ELLENS, A., ANDRES, H., ter HEERDT, M.L.H., WEGH, R.T., MEIJERINK, A. and BLASSE, G. Spectral-line-broadening study of the trivalent lanthanide-ion series.II. The variation of the electron-phonon coupling strength through the series. In: *Phys. Rev. B*, 1997, vol.55, p.180-185.
12. ELLENS, A., ANDRES, H., MEIJERINK, A. and BLASSE, G. Spectral-line-broadening study of the trivalent lanthanide-ion series.I. Line broadening as a probe of the electron-phonon coupling strength. In: *Phys. Rev. B*, 1997, vol.55, p.173-178.
13. LUPEI, A., LUPEI, V., PRESURA, C., ENAKI, V.N., PETRARU, A. Electron-phonon coupling effects on Yb³⁺ spectra in several laser crystals. In: *J. Phys.: Condens. Matter.*, 1999, vol.11, p.3769-3778.
14. MARKUSHEV, V.M., TSARYUK, V.I., ZOLIN, V.F. Vibronic luminescence excitation spectra of europium in Y₂O₃ and Y₃Al₅O₁₂. In: *Opt. i Spectr.*, 1985, vol. 58, p.583-588.
15. ENACHI, V., LUPEI, A., PRESURA C., CIOBU V. Effects of resonant electron-phonon interaction for the ions in laser crystals. In: *Proceedings of SPIE. Fifth Conference in Optics. Romopto'97*, 9-12 sept. 1997, vol.3405, p.570-577.
16. WOOD, D.L. Energy levels of YB³⁺ in garnets. In: *J. Chem. Phys.*, 1963, vol.39, p.1671-1672.
17. KONINGSTEIN, J.A. Energy levels and crystal-field calculations of trivalent ytterbium in yttrium aluminum garnet and yttrium gallium garnet. In: *Theoret. Chim. Acta*, 1965, vol.3, p.271-277.
18. BOGOMOLOVA, G.A., VYLEGZHANIAN, D.N., KAMINSKII, A.A. Spectral and lasing investigations of garnets with Yb³⁺ ions. In: *Sov. Phys. J. E. T. F.*, 1975, vol.69, p.860-874.
19. PEARSON, J.J., HERRMANN, G.F., WICKERSHEIM, K.A., BUCHANAN, R.A. Energy levels of Yb³⁺ in gallium and aluminum garnets. In: *Spectra. Phys. Rev.*, 1967, vol.159, p.245-250.
20. BOGOMOLOVA, G.A., BUMAGINA, L.A., KAMINSKII, A.A., MALKIN, B.Z. Crystalline field in laser garnets with TR³⁺ ions in exchange charge model. In: *Sov. Solid State Phys.*, 1977, vol.19, p.1439.
21. KAMINSKII, A.A. *Laser Crystals: Their Physics and Properties*. Berlin: Springer Verlag, 1990, 459 p.

Prezentat la 11.01.2016